Propagación y Transmisión de Ondas: Apuntes de Electromagnetismo

Javier Artiga Garijo

Curso 2015/16



Ondas Electromagnéticas

1. Ondas en líneas de transmisión

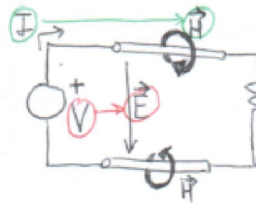
1.1. Líneas de transmisión. Estudio en el dominio del tiempo

A diferencia de la teoría de circuitos clásica, en la que $l \ll \lambda$, en la teoría de líneas de transmisión $l \simeq \lambda$ ($f > 1$ GHz), por lo que ya no despreciamos los efectos de propagación de la señal por los elementos que la procesan.

Línea de transmisión ideal: Sistema formado por dos conductores perfectos inmersos en un medio dieléctrico sin pérdidas con una sección transversal que no varía a lo largo de la distancia.

Ej.: Cable bifilar (cable telefónico, el más sencillo), cable coaxial.
En teoría de circuitos clásica,

$$V = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l}$$



$$\text{Ley de Ampere: } \oint_c \vec{H}d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t}(\int_s \underbrace{\vec{D}d\vec{S}}_{\vec{D}=\epsilon\vec{E}})$$

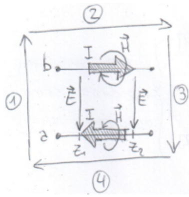
Aplicando la ley de Faraday

$$\oint_c \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_s \vec{B}d\vec{S}$$

en la sección transversal, como suponemos que $\vec{H}$ está contenido en la sección transversal

$$\iint_S \vec{B}d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_c \vec{E}d\vec{l} = 0$$

Lo cual implica que el campo eléctrico es conservativo, y por ello podemos definir un voltaje con pleno sentido físico en la sección transversal con $V = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l}$.



Aplicando la ley de Faraday al plano del papel

$$\oint_c \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} d\vec{S}$$

① $\int_a^b \vec{E} d\vec{l} = 0$ ③ $\int_b^a \vec{E} d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E} d\vec{l} = 0$

② $\int_b^{z_1} \vec{E} d\vec{l} = -V(z_1)$ ④ $\int_{z_2}^b \vec{E} d\vec{l} = V(z_2)$

$$-V(z_1) + 0 + V(z_2) + 0 = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} d\vec{S} \Rightarrow V(z_1) - V(z_2) = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} d\vec{S}$$

Este fenómeno físico se puede modular como si hubiese una bobina en serie conectada a uno de los cables.

$$\Delta V = V_1 - V_2 = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

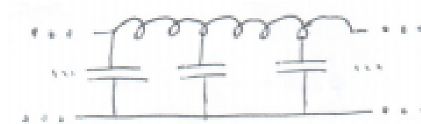
$$\text{De hecho, } L = \frac{\iint_s \vec{B} d\vec{S}}{I}, \text{ ya que } \iint_s \vec{B} d\vec{S} = L \cdot I$$

Por otra parte, en el sistema ideal de la línea de transmisión se da un fenómeno físico modelable con un condensador:

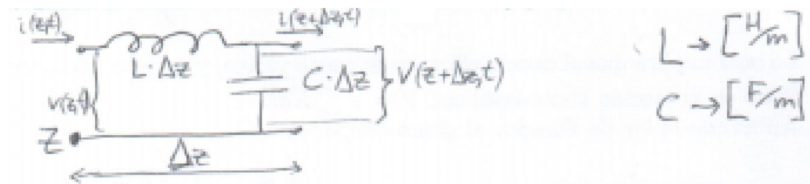
$$C = \frac{Q}{V}$$



En total, podemos modelar la línea de transmisión de esta manera:



Para abordar el análisis, la dividimos en celdas elementales de longitud muy pequeña.



En la celda elemental, $v(z,t) - v(z+\Delta z,t) = L \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{-(v(z+\Delta z,t) - v(z,t))}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \boxed{L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}} [1]$$

Análogamente con $i(z,t) - i(z+\Delta z,t) = C \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$, $\boxed{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}} [2]$

Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones de telegrafista.
Nótese que las ecuaciones de telegrafista son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y que las dos ecuaciones están acopladas (comparten incógnitas), formando un sistema de ecuaciones. Para resolverlo,

$$\frac{\partial[1]}{\partial z} \to \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = -L\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \partial t}$$

$$\frac{\partial[2]}{\partial t} \to \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = -C\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}$$

Aplicando el teorema de Schwartz de igualdad de derivadas cruzadas,

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} \equiv \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \partial t}$$

finalmente queda

$$\boxed{\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}}$$

Procediendo análogamente y aplicando Schwartz,

$$\frac{\partial[1]}{\partial t}; \quad \frac{\partial[2]}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}}$$

que son ecuaciones de onda en una dimensión, y por tanto se propagan como ondas a lo largo de la línea de transmisión.
Centrándonos en el $v(z,t)$,

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2}, \quad \text{donde } \boxed{v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

En general, ¡$v_p \neq c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s!

Solución para $v(z,t)$:
Cualquier función $F(\xi)$ tal que $\xi = t \mp z/v_p$ es solución.
La solución general de la ecuación de onda en una dimensión es $v(z,t) = \underset{\substack{\text{Onda progresiva} \\ \longrightarrow}}{F_1(t - z/v_p)} + \underset{\substack{\text{Onda regresiva} \\ \longleftarrow}}{F_2(t + z/v_p)}$

Tomando la solución para $v(z,t)$ e incorporándola a las ecuaciones del telegrafista:

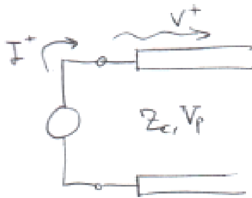
$$i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \{F_1(t - z/v_p) - F_2(t + z/v_p)\}$$

Definimos $z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ como la impedancia característica de la línea de transmisión, y escribiremos:

$$v(z,t) = V^+(t - z/v_p) + V^-(t + z/v_p)$$

$$\begin{aligned} i(z,t) &= I^+(t - z/v_p) + I^-(t + z/v_p) \\ &= \frac{1}{z_0}\left(V^+(t - z/v_p) - V^-(t + z/v_p)\right), \end{aligned} \quad \text{donde } z_0 = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-}$$

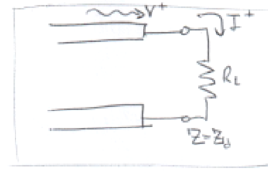
Caso sencillo



sólo se excitan V^+, I^+

$$\frac{v(z,t)}{i(z,t)} = \frac{V^+}{I^+} = Z_0$$

Suponiendo que la línea está cargada por v



$z = z_d \to \frac{v(z_d,t)}{i(z_d,t)} = R_L$
como $\frac{V^+}{I^+} = Z_0$,
la onda $\oplus$ no cumple la c.c. de R_L, salvo que $Z_0 = R_L$

Solución:

$$\frac{v(z_d,t)}{i(z_d,t)} = \frac{V^+(z_d,t) + V^-(z_d,t)}{I^+(z_d,t) + I^-(z_d,t)} = R_L$$

Línea de transmisión:

$$\frac{V^+}{I^+} = Z_0, \; -\frac{V^-}{I^-} = Z_0$$

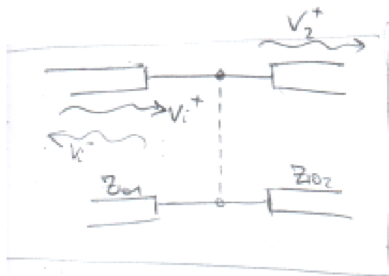
Coeficiente de reflexión:

$$\rho(z_d) = \frac{V^-}{V^+}(z = z_d) = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

Coeficiente de transmisión:

$$\tau(z_d) = \frac{V_L}{V^+}(z = z_d) = \frac{2R_L}{R_L + Z_0}$$

Caso útil



$$\frac{v(z,t)}{i(z,t)} = \frac{V^+}{I^+} = Z_{02}, \; \text{como si } R_L = Z_{02}$$

Solución:
Coeficiente de reflexión:

$$\rho(z_d) = \frac{V_1^-}{V_1^+}(z = z_d) = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

Coeficiente de transmisión:

$$\tau(z_d) = \frac{V_L}{V^+}(z = z_d) = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

1.2. Estudio en el dominio de la frecuencia. Régimen permanente sinusoidal

En telecomunicaciones trabajamos en el dominio de la frecuencia, suponiendo así que la excitación es una señal sinusoidal en régimen permanente.
Decimos que una señal $v(t)$ se puede expresar como

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(f)e^{j\omega t}df; \quad \omega = 2\pi f$$

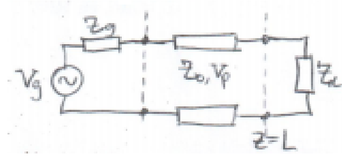
Las señales sinusoidales en régimen permanente que usamos como base tienen la forma

$$\begin{aligned} Ve^{j\omega t} &= |V| \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} = |V| \cdot e^{j(\omega t+\phi)} \\ &= |V|(\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)) \end{aligned}$$

Trabajando en el dominio de la frecuencia garantizamos que el dispositivo funciona correctamente en su rango de frecuencias (el ancho de banda o BW, de *bandwidth*), el cual depende del tipo de señal. Las señales de voz tienen poco ancho de banda, mientras que las de vídeo tienen un BW amplio. Una señal digital tiene un BW proporcional a los bps (bits por segundo).

Líneas de transmisión en el dominio de la frecuencia

Veamos cómo responden las líneas de transmisión en régimen permanente sinusoidal, es decir, frente a una excitación de tipo $Ve^{j\omega t}$



- **Onda progresiva** (onda ⊕): $V_0^+ e^{j\omega(t-z/v_p)}$
- **Onda progresiva** (onda ⊖): $V_0^- e^{j\omega(t+z/v_p)}$

Cumplen la condición de contorno en el RPS

Tensión y corriente totales en la línea de transmisión:

$$\begin{aligned} V(z,t) &= \text{onda } \oplus + \text{onda } \ominus = \overbrace{(V_0^+ e^{j\omega(t-z/v_p)} + V_0^- e^{j\omega(t+z/v_p)})}^{\text{Fasor}} \cdot e^{j\omega t} \\ I(z,t) &= I^+ + I^- = \underbrace{\frac{1}{Z_0}(V_0^+ e^{j\omega(t-z/v_p)} + V_0^- e^{j\omega(t+z/v_p)})}_{\text{Fasor}} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Constante de fase de la línea de transmisión

Introduciendo $\beta = \frac{\omega}{v_p}$:

$$\begin{aligned} V(z,t) &= V_0^+ e^{j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \\ I(z,t) &= \frac{1}{Z_0}(V_0^+ e^{j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}) \end{aligned}$$

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo reales cumplen que si ante una señal de excitación compleja producen una señal de respuesta compleja determinada, entonces si se excitan con la parte real de la entrada producirán como respuesta la parte real de la salida.
En nuestro caso, significará que si se excita con $Re\{|V|e^{j\phi}e^{j\omega t}\} = |V|\cos(\omega t + \phi)$, entonces la respuesta que aparecerá será $Re\{(V_0^+ e^{j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}) \cdot e^{j\omega t}\} = |V_0^+|\cos(\omega t - \beta z + \phi_0^+) + |V_0^-|\cos(\omega t + \beta z + \phi_0^-)$

Longitud de onda (λ)

Es la distancia que hay que desplazarse a lo largo de la línea de transmisión para que $V(z)$ e $I(z)$ se repitan ($V(z)$ e $I(z)$ son periódicas en el espacio con periodo λ).
Quedándonos con la parte real de los fasores, las señales tienen forma de coseno, cuyo periodo es λ.
La longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos de la línea de transmisión que están siempre en fase. Matemáticamente, se cumple que $\beta \cdot \lambda = 2\pi$. Además, de esta expresión se deduce que $\lambda = \frac{v_p}{f}$

Impedancia de entrada

$$Z_{in} = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0^+ e^{j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}}{\frac{1}{Z_0}(V_0^+ e^{j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z})}$$

Coeficiente de reflexión

$$\rho(z) = \frac{V^-(z,t)}{V^+(z,t)} = \frac{V_0^- e^{j\beta z} \cancel{e^{j\omega t}}}{V_0^+ e^{-j\beta z} \cancel{e^{j\omega t}}} = \rho(z=0) e^{j2\beta z}$$

Si la carga Z_L es una resistencia de valor R_L:

$$\rho(0) = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

En RPS, Z_L toma el papel de la R_L: $Z_L = \frac{V_L}{I_L}$; en el tiempo, $R_L = \frac{v_L(t)}{i_L(t)}$. Por lo tanto, en RPS

$$\boxed{\rho(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$

y en la posición $z = -L$

$$\boxed{\rho(z=-L) = \rho(0) e^{-j2\beta L}}$$

Volviendo al cálculo de

$$Z_{in}(z=-L) = Z_0 \frac{e^{-j\beta z} + \frac{V_0^+}{V_0^-} e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \frac{V_0^+}{V_0^-} e^{j\beta z}} = Z_0 \frac{e^{-j\beta z} + \rho(0) e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \rho(0) e^{j\beta z}}$$

teniendo en cuenta que $\rho(0) = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$,

$$\boxed{Z_{in}(z=-L) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta L) + jZ_0 \sin(\beta L)}{Z_0 \cos(\beta L) + jZ_L \sin(\beta L)}}$$

Veamos la relación existente entre $Z_{in}(z=-L)$, $\rho_{in}(z=-L)$, partiendo de

$$z_{in}(z-L) = Z_0 \frac{e^{-j\beta z} + \frac{V_0^+}{V_0^-} e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \frac{V_0^+}{V_0^-} e^{j\beta z}}$$

y reorganizando

$$\frac{Z_{in}(z=-L)}{Z_0} = \frac{1+\rho(0)e^{-j2\beta L}}{1-\rho(0)e^{-j2\beta L}}$$

finalmente tenemos

$$\boxed{\frac{Z_{in}(z=-L)}{Z_0} = \frac{1+\rho(z=-L)}{1-\rho(z=-L)} \Rightarrow \rho(z=-L) = \frac{Z_{in}(z=-L)-Z_0}{Z_{in}(z=-L)+Z_0}}$$

Ondas estacionarias

En general, en una línea de transmisión siempre hay ondas estacionarias. En las ondas estacionarias se da que:

$$\exists Z_d \text{ tal que } |V(z)| = V_{\text{máx}} = |V_0^+| + |V_0^-| \Rightarrow |I(z)| = I_{\text{mín}} = \frac{1}{Z_0}(|V_0^+| - |V_0^-|)$$

Esto se debe a que en $z = Z_d$ tanto la onda progresiva como la regresiva tienen la misma fase, por lo que tienen la forma $|V_0^+|e^{j\phi_1}$ y $|V_0^-|e^{j\phi_1}$. En este punto Z_d se suman constructivamente, dando

$$V(z=Z_d) = (|V_0^+| + |V_0^-|)e^{j\phi_1}$$

En la corriente se restan en fase, resultando el mínimo valor posible:

$$I(z=Z_d) = \frac{1}{Z_0}(|V_0^+| - |V_0^-|)e^{j\phi_1}$$

En $z = Z_d \pm \lambda/4$ ocurre lo opuesto:

$$|V(z=Z_d \pm \lambda/4)| = V_{\text{mín}} = |V_0^+| - |V_0^-|$$

con lo que

$$|I(z=Z_d \pm \lambda/4)| = I_{\text{máx}} = \frac{1}{Z_0}(|V_0^+| - |V_0^-|)$$

Además,

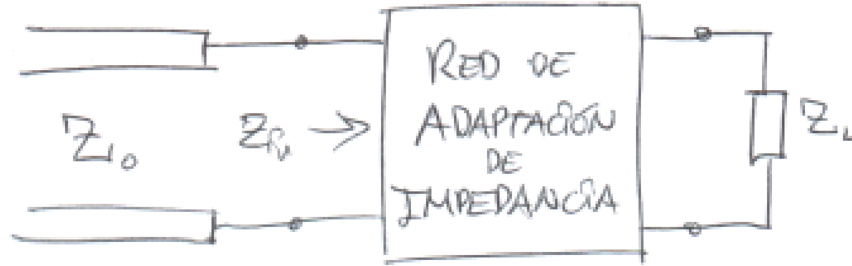
$$V_{\text{máx}} \Rightarrow Z_{\text{in, máx}} \in \mathbb{R};\ \rho > 0 \in \mathbb{R}$$
$$V_{\text{mín}} \Rightarrow Z_{\text{in, mín}} \in \mathbb{R};\ \rho < 0 \in \mathbb{R}$$

Relación de Onda Estacionaria (ROE)

En inglés, SWR (*Standing Wave Ratio*). Se define como

$$\boxed{S = \frac{V_{\text{máx}}}{V_{\text{mín}}} = \frac{|V_0^+| + |V_0^-|}{|V_0^+| - |V_0^-|} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}}$$

1.3. Adaptación de impedancias



Gracias a la red de adaptación de impedancia, toda la potencia en la línea de transmisión es absorbida por Z_L, consiguiendo así la máxima transferencia de potencia a la carga Z_L.

Demostración

$$P(z) = \frac{1}{2} \cdot Re\{V(z) \cdot I(z)\}$$

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}(V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{-j\beta z})$$

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0} Re\{V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{-j\beta z} \cdot \frac{1}{Z_0}(V_0^+ e^{-j\beta z} - V_0^- e^{-j\beta z})\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0} \cdot Re\{|V_0^+|^2 - |V_0^-|^2\} = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}|V_0^+|^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}|V_0^-|^2 = p^+ - p^- \end{aligned}$$

Por tanto, se consigue máxima potencia si

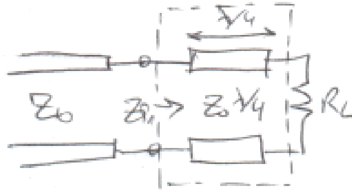
$$Z_{in} = Z_0 \rightarrow \rho = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = 0 \rightarrow V^- = \rho V^+ = 0 \rightarrow P(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}|V_0^+|^2 = P^+$$

Otra consecuencia de la adaptación de impedancia es que $V^- = 0 \rightarrow$ No existe onda estacionaria.

Varios tipos de adaptación de impedancia

- Transformadores $\lambda/4$
- Red de adaptación con STUB
- Red de elementos concentrados

Transformador I/4



$Z_{in} = Z_{0\lambda/4} \cdot Z_0 \frac{R_L \cos(\beta L) + jZ_{0\lambda/4}\sin(\beta L)}{Z_{0\lambda/4}\cos(\beta L) + jR_L \sin(\beta L)}$
$l = \lambda/4 \rightarrow \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$
Como $Z_{in} = Z_0$,

$$Z_{in} = \frac{Z_{0\lambda/4}^2}{R_L} = Z_0 \rightarrow Z_{0\lambda/4} = Z_0 R_L$$

1.4. Modelo generalizado de líneas de transmisión. Líneas con pérdidas.

Si hay pérdidas ($\alpha \neq 0$):

$$z_{in}(-L) = Z_0 \frac{Z_L \cosh(\gamma l) + Z_O \sinh(\gamma l)}{Z_O \cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}$$

con $\gamma = \alpha + j\beta \leftarrow \alpha =$ coef. de pérdidas, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

1.5. Velocidad de propagación de una onda. Velocidad de fase. Velocidad de grupo. Dispersión.

La tensión que se propaga por una línea de transmisión ideal es $V(z,t) = V^+(t - z/v_p) + V^-(t + z/v_p)$, donde

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \textbf{Velocidad de propagación}$$

En el dominio de la frecuencia, cuando trabajamos en rég. permanente sinusoidal asumimos que la excitación tiene la forma $V \cdot e^{j\omega t}$. Esto se puede incluir en la expresión anterior (dominio temporal) según

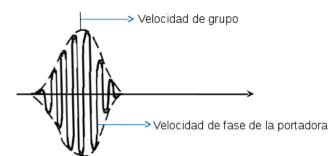
$$V(z,t) = V_0^+ e^{-j\beta z} e^{-j\omega t} + V_0^- e^{+j\beta z} e^{-j\omega t},$$

con $\beta = \frac{\omega}{v_p}$ $\Rightarrow v_p =$ **Velocidad de fase**
Cuando trabajamos en RPS, esta **velocidad de fase** se define como la *velocidad a la que debería desplazarse un observador para ver todo el tiempo fase constante*. Es un concepto bastante matemático que puede tener poco significado físico (en la práctica vimos que incluso $v_p > c_0$, lo cual se explica porque la velocidad de la fase no implica transporte de materia ni de energía).

Si el ancho de banda de la señal es pequeño, podemos definir una velocidad de grupo para la onda con un claro significado físico. Operando matemáticamente, obtenemos que la onda propagada a lo largo de la línea de transmisión queda finalmente como

$$v^+(z,t) = f(t - z/v_g)\cos(\omega_0 \cdot (t - \frac{z}{v_{p,0}}))$$

donde tenemos **velocidad de fase:**
$v_{p,0} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$
y **velocidad de grupo**:
$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}_{(\omega=\omega_0)}$
La velocidad de fase de la portadora es la de la sinusoide pura. La **velocidad de grupo** se define como la velocidad a la que viaja la envolvente de banda estrecha.



Aplicando todo esto, en una línea de transmisión ideal (por ejemplo *stripline* o cable coaxial), la velocidad de propagación de la onda es igual a c (velocidad de la luz en el medio), que es menor que c_0 (en el vacío). Sin embargo, en una línea de transmisión no ideal o **guía de onda** (por ejemplo *microstrip* o gua rectangular o circular) la v_p sí depende de ω y se produce dispersión, teniendo $v_p > c_0$ y $v_g \leq c_0$ (la velocidade de grupo casi siempre es igual a la velocidad con la que viajan la información y la energía).

The Complete Smith Chart

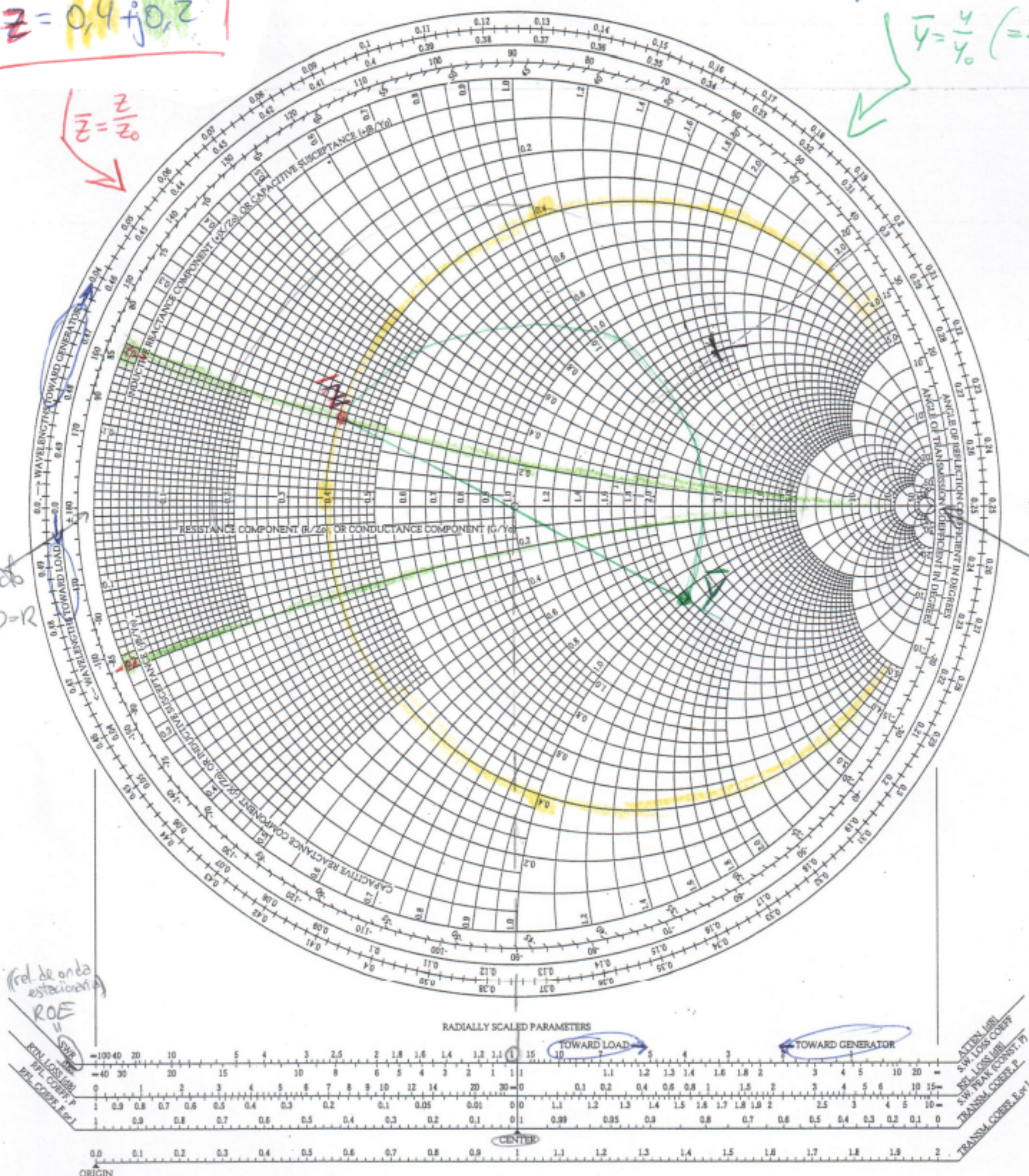
Black Magic Design

Ej.: IMPEDANCIA

$Z = 0,4 + j0,2$

ADMITANCIA

Y



En la circunferencia con centro en 1+j0 (en el eje), el coef. de reflex. es cte.

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad \rho(z) = \rho_L e^{-2j\beta l}$$

En la carta de Smith, una vuelta completa (de 360°) equivale a π, no a 2π.

Ej: $L = 0,91\lambda = 0,5\lambda + 0,41\lambda$ (una vuelta)

2. Ondas electromagnéticas planas

2.1. Ecuaciones de Maxwell

	Forma integral	Forma diferencial
1. Ley de Gauss para $\vec{E}$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
2. Ley de Gauss para $\vec{B}$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
3. Ley de Faraday	$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$
4. Ley de Ampere-Maxwell	$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = I + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\delta \vec{D}}{\delta t}$

2.2. Ondas electromagnéticas planas en dieléctricos ideales

Suponemos que nos encontramos en un medio: lineal, homogéneo, isótopo, dieléctrico puro y sin fuentes.

- lineal: $\epsilon \neq \epsilon(|\vec{E}|);\ \mu \neq \mu(|\vec{H}|)$
- homogéneo: $\epsilon \neq \epsilon(\vec{r});\ \mu \neq \mu(\vec{r})$
- isótopo: ϵ, μ son escalares
- dieléctrico puro: $0^- = 0$
- sin fuentes: $\rho(\vec{r}) = 0;\ \vec{J}(\vec{r}) = 0$

En este medio aplicamos la 3ª y 4ª ecuaciones de Maxwell en su expresión puntual. Como ambas son lineales, podemos escribir $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ y sabiendo que $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, procedemos a resolver el sistema de ecuaciones:

Tomamos el rotacional de la 3ª ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{medio homogéneo}}}{=} -\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \right)$$

Utilizando la 4ª ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Utilizamos la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla\vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Con la primera ecuación de Maxwell $\nabla\vec{D} = \rho$

$$\epsilon \cdot \nabla\vec{E} = \rho \Rightarrow \lambda\vec{E} = 0\ (\rho = 0)$$

Así que, en definitiva,

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Análogamente con $\vec{H}$, obtenemos también que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

Conclusión: como $\vec{E}, \vec{H}$ cumplen la ecuación de onda en 3D,
$\vec{E}, \vec{H}$ se propagan como ondas electromagnéticas.

Ecuaciones de onda en 3D

- Campo electromagnético realizado por una antena desde una distancia suficiente para considerar la onda plana.
- Utilizando teoría matemática similiar a la de Fourier pero extendida a las 3 dimensiones, se deduce que *cualquier onda electromagnética se puede expresar como la integral de una onda plana que se propaga en varias direcciones.*

Obtendremos la solución más sencilla: la de las ondas planas uniformes. Para ello, suponemos que:

- Las ondas electromagnéticas se propagan en la dirección de $\vec{E}$.
- El campo $\vec{E}$ permanece constante en el plano XY.
- El campo $\vec{E}$ está polarizado en la dirección de x ($\vec{E} = E_x \cdot \hat{x}$).

La ecuación de onda 3D quedará:

$$\nabla^2 E_x \not{\hat{x}} = \mu\epsilon \frac{\delta^2 E_x \not{\hat{x}}}{\delta t^2}$$

Ecuación de onda 1D La solución general es:

$$\boxed{E_x = f_1(\underset{\longrightarrow}{t - z/v}) + f_2(\underset{\longleftarrow}{t + z/v})}$$

donde $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda\epsilon}}$ es la velocidad de propagación de la onda electromag. plana, es decir, la velocidad de la luz en el medio.
Introduciendo el resultado obtenido en las ecuaciones de Maxwell (en la 3ª), obtenemos el campo magnético $\vec{H} = H_y \cdot \hat{y}$

$$\boxed{H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot (f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v))}$$

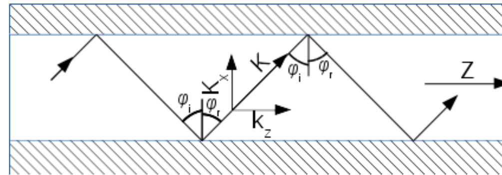
Densidad de potencia transportada por la Onda E.M. plana progresiva

$$\vec{p}^+ = [\ldots] = \frac{1}{2} \frac{|E_o^+|^2}{\eta} \hat{z} \quad \text{en } [\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}]$$

3. Guías de onda

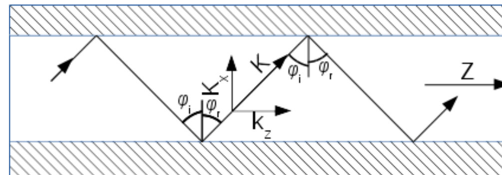
3.1. Estructuras para el guiado de O.E.M. Guías de onda metálicas y dieléctricas

Guías de onda: Estructuras que guían las ondas electromagnéticas de un punto a otro, confinándolas a una región del espacio
Guías de onda metálicas: Se compone de dos planos conductores perfectos situados de forma paralela y separados por un dieléctrico. Sucede que el ángulo de rebote permanece constante a lo largo de la estructura.



$$\boxed{\phi_i = \phi_r = \phi_i' = \phi_r' = \dots}$$

Guías dieléctricos: Topología similar a la anterior. Se usan mucho a frecuencia óptica. A esas frecuencias, los conductores de la naturaleza (cobre, plata, oro) no se comportan bien y tienen elevadas pérdidas.



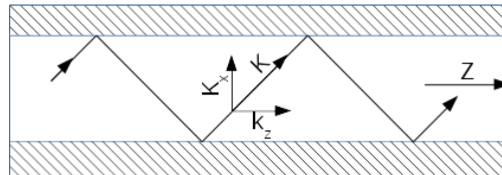
$$\boxed{\phi_i = \phi_r = \phi_i' = \phi_r' = \dots}$$

$\boxed{\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}}$ $\qquad \phi_{ic} \Rightarrow$ Ángulo crítico

$\phi_i > \phi_{ic} \rightarrow$ Todo se refleja, nada se transmite $\Rightarrow$ Reflexión total sobre dieléctirco

Método de análisis

Se centra en las ondas efectivas u ondas guiadas.



Hay "dos direcciones de propagación" y "dos ondas": aparece una "*onda estacionaria*" en *dirección transversal*, en la que no hay transporte neto de energía, y una "*onda en dirección paralela a los planos*" (eje Z), donde se da la propagación efectiva de la energía.
La forma matemática de las "*ondas efectivas*" u "*ondas guiadas*" que aparecen será:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{\mp j\beta z}$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y)e^{\mp j\beta z}$$

$\vec{H}(x, y), \vec{E}(x, y) \rightarrow$ Estructura de campo transversal
$e^{\mp j\beta z} \rightarrow$ Término de propagación (": onda progresiva)
Hablando con propiedad, llamaremos modo a la estructura matemática de la solución $(\vec{E}(x, y), \vec{H}(x, y), \beta)$. Cada modo tendrá asociadas dos ondas guiadas, la onda progresiva $(e^{-j\beta z})$ y la regresiva $(e^{+j\beta z})$.

3.2. Ondas guiadas y modos. Propiedades y tipos

Si tenemos una guía de onda con la sección transversal que no varía con Z y buscamos *ondas guiadas* y *modos* que tengan la forma $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y)e^{\mp j\beta z}$, $\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y)e^{\mp j\beta z}$, entonces se puede demostrar que:

- Los modos de la guía de onda forman una **base** con la que se puede representar cualquier distribución de campo electromagnético que pueda haber en la guía de onda.
- Los modos de la guía son **ortogonales** entre ellos, por lo que forman una base ortogonal. En consecuencia, la descomposición en modos es única y los modos se propagan a lo largo de la guía de forma independiente unos de otros, sin transferirse potencia entre ellos.

Para resolver el problema de la propagación de una estructura de campo por una guía, descomponemos en una suma de modos y propagamos cada modo de forma independiente por la guía de onda. De esta forma, el campo a la salida será igual a la suma de modos a la salida.

Tipos de medios Las siglas TEM significan Transversal Electro-Magnético.

- **TEM** ($\not{E}_z, \not{H}_z$) ($E_z = 0, H_z = 0$) Los más sencillos, con ondas planas uniformes
- **TM** ($E_z \not{H}_z$) ($E_z \neq 0, H_z = 0$)
- **TE** ($\not{E}_z, H_z$) ($E_z = 0, H_z \neq 0$)
- **Híbridos** (E_z, H_z) ($E_z \neq 0, H_z \neq 0$) Los más complicados, sólo en alguna guía de onda "compleja"

3.3. Modos TEM

Único para cada guía de onda, con propiedades muy particulares:

- $\beta = k$
- $E_z = 0, H_z = 0$

Aplicando la tercera ecuación de Maxwell en el plano transversal,

$$\oint_c \vec{E}d\vec{l} = 0 \quad \text{(ya que } H_z = 0\text{)}$$

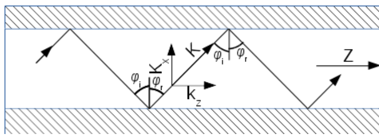
Esto implica que el campo $\vec{E}$ es conservativo en el plano transversal, por lo que cumple las *leyes de la electrostática*. Además, se puede definir un voltaje con pleno sentido físico ($V_{21} = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$).
Si también aplicamos la cuarta ecuación de Maxwell a este plano,

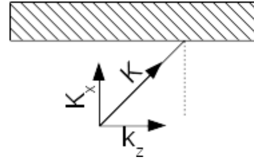
$$\oint_c \vec{H}d\vec{l} = I \quad \text{(ya que } E_z = 0\text{)}$$

se cumplen las *leyes de la magnetostática*, y $\vec{H}$ está totalmente ligado a la corriente.
En consecuencia, una guía de onda que opera con su modo TEM se puede estudiar con un modelo de tensión y corriente, así que esta guía de onda **es una línea de transmisión**.

3.4. Modos TE y TM

Cada posible ángulo de rebote dará lugar a un modo distinto, en principio. ¿Son todos los ángulos de rebote θ soluciones válidas para los modos?





Ángulo de Brillouin del medio: $k_z = \beta = k\cos(\theta_B)$, $\quad k_x = k\sin(\theta_B)$

Para que exista el modo es necesario que la componente que está rebotando sobre la pared en la dirección transversal (k_x) se sume en fase durante los sucesivos rebotes, dando lugar a una distrib. de campo estable.
Por ello, en la guía de planos conductores paralelos deberá cumplirse:

$$-k_x d + \pi - k_x d + \pi = m2\pi$$

que se suele escribir como

$$2k_x d = m2\pi \Rightarrow \boxed{k_x = \frac{m\pi}{d}} \quad \text{donde } m = 1, 2, \ldots (m = 0 \text{ da el modo TEM})$$

Cada valor de m dará lugar a un modo TE o TM distinto.
Si **no** se cumple esta condición para k_x, no obtenemos un modo.
La condición hallada para k_x implica que los modos TE y TM sólo pueden propagarse a partir de una frecuencia, con comportamiento de tipo paso alto. La importante explicación es la siguiente:
Para que haya propagación en el modo, $k > k_{x,m}$ (porque $k_x = k\sin(\beta_B)$), pero $k = \frac{\omega}{v} = 2\pi f\sqrt{\mu\epsilon}$. Por ello:

$$k_c = k_{x,m} = \frac{m\pi}{d} \text{ (en la guía de p.c.p.)}$$

y si $k > k_c$ se dice que *el modo está en propagación*. Esto sucederá cuando $f > f_c$, porque $f_c = k_c\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}}$.

4. Antenas y propagación no guiada

Una antena es, según la IEEE, "*aquella parte de un sistema transmisor o receptor diseñada específicamente para radiar o recibir ondas electromagnéticas*". También puede definirse como una región de transición entre una zona donde existe una onda electromagnética guiada y el espacio libre, donde existe una onda no guiada.

4.1. Estructuras básicas para la implementación de antenas

Mecanismo de radiación:

- Antenas de hilo
- Antenas de bocina
- Antenas impresas

4.2. Parámetros de antena en transmisión

Impedancia de entrada

La antena actúa como una impedancia de carga para la fuente de señal.
Podemos definir esta impedancia de entrada de la antena como

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_a}{I_a}$$

La impedancia de entrada de la entrada depende en general de la frecuencia:

$$Z_{\text{in}}(f) = R_{\text{in}}(f) + jX_{\text{in}}(f)$$

Campos EM radiados por la antena en la zona de campo lejano

La antena se puede considerar una fuente puntual situada en el origen de coordenadas.

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = [\theta \cdot F_\theta(\theta,\phi) + \phi F_\phi(\theta,\phi)]\frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

$$\vec{H}(r,\theta,\phi) = [\theta \cdot H_\theta(\theta,\phi) + \phi H_\phi(\theta,\phi)]\frac{e^{-jk_0 r}}{r}$$

$$H_\theta = \frac{E_\theta}{\mu_0} \qquad H_\theta = \frac{E_\theta}{\mu_0}$$

En campo lejano es esférica, pero la onda localmente es plana:

$$P = \frac{1}{2}\text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{\mu_0}\vec{r}$$

$$P_{\text{rad}} = \oint_s \int P \cdot dS$$

Ninguna antena puede radiar igual en todas las direcciones, tal y como justifican estas ecuaciones.

Figura 1: θ = elevación, ϕ = azimut, r

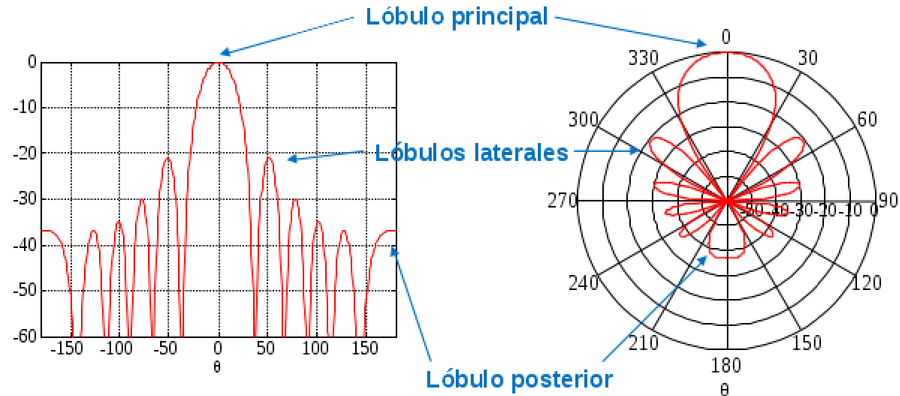
Diagrama de radiación

Es una representación gráfica de la amplitud del campo radiado por una antena (o de la densidad de potencia), en la zona de campo lejano, en función de la dirección espacial (coordenadas esféricas θ, ϕ), y a una distancia fija de la antena.
Formatos de los diagramas de radiación:

- Diagramas absolutos: se representan para una potencia de radiación y una distancia constantes.
- Diagramas relativos: valores normalizados con respecto al máximo de la gráfica.
- Unidades lineales o dB: usando dB, los diagramas de potencia y campo coinciden.

$$10 \log \frac{|\vec{P}|}{|\vec{P}_{\text{máx}}|} = 20 \log \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}_{\text{máx}}|} \quad \text{[en dB]}$$

Lóbulo: porción del diagrama delimitada por regiones de radiación más débil. El lóbulo principal contiene la dirección de máxima radiación. También existen los lóbulos laterales (secundarios) y el posterior (trasero).



Tipos de diagramas de radiación:

- Isotrópico: radiación idéntica en todas las direcciones del espacio. Es sólo una referencia teórica.
- Omnidireccional: diagrama de radiación presenta simetría de revolución en torno a un eje. Es no direccional en un plano, típicamente respecto al azimut. Ej.: antena dipolo, monopolo.
- Direccional: concentra la radiación en ciertas direcciones del espacio. Ej.: antena de bocina.

Directividad

Es una medida de la direccionalidad de la antena, definida como la relación entre la densidad de potencia radiada por la antena en una dirección del espacio, en campo lejano, a una distancia dada, y la densidad de potencia que se tendría a esa misma distancia *si la potencia fuera radiada de manera isotrópica.*

$$D(\theta,\phi) = \frac{|P(r,\theta\phi)|}{\frac{P_{\text{rad}}}{4\pi r^2}}$$

Si no se especifica la dirección, se entiende que se da en la de máxima radiación. Puede pedirse en unidades naturales o en dBi (dB respecto a la isotrópica).

Ganancia

Parámetro parecido a la directividad. Es la relación entre la densidad de potencia radiada por la antena en una dirección del espacio, en campo lejano, a una distancia dada, y la densidad de potencia que se tendría a esa misma distancia *si la potencia entregada* a la antena *fuera radiada* *en su totalidad* *y de manera isotrópica.*

$$G(\theta,\phi) = \frac{|P(r,\theta\phi)|}{\frac{P_{\text{ent}}}{4\pi r^2}}$$

$$\boxed{G(\theta,\phi) = \mu_{\text{rad}} D(\theta,\phi)}$$

Polarización

La **polarización de una antena** es la de la onda radiada por la antena. Si no se especifica la dirección espacial, se toma la de la máxima directividad.
Polarización de una onda: figura geométrica descrita por el extremo del vector campo eléctrico al transcurrir el tiempo, en un punto fijo del espacio, en el plano perpendicular a la dirección de propagación.
Tipos de polarización:

- Lineal:
- Circular:
- Elíptica:

Cualquier polarización puede descomponerse en la suma de 2 polarizaciones ortogonales: 2 polarizaciones lineales ortogonales y 2 polarizaciones circulares ortogonales (a izquierdas y derechas).

4.3. Parámetros de antena en recepción

Reciprocidad

El teorema de reciprocidad permite demostrar que las propiedades de una antena en recepción son las mismas que las de esa antena en transmisión. Esto es, los parámetros de impedancia, diagrama de radiación, directividad, ganancia y polarización son iguales. El parámetro específico en recepción es el área efectiva.

Impedancia de salida

En recepción, la antena actúa como un generador de tensión cuya impedancia de salida, Z_a, es idéntica a la impedancia de entrada de la entrada, Z_{in} (aplicación del teorema de Thevenin).

$$Z_a = Z_{\text{in}}$$

Área efectiva

Área efectiva de una antena es la relación entre la potencia captada por la antena y la densidad de potencia de la onda que incide sobre la antena. Representa físicamente la porción del frente de onda que la antena es capaz de interceptar y drenar de manera completa.

$$A_{\text{ef}} = \frac{P_{\text{captada}}}{|P|}$$

Potencia disponible en la antena: potencia que entrega a una carga adaptada.

$$P_{\text{disponible}} = P_{\text{captada}} \cdot \mu_{\text{rad}}$$

Eficiencia de apertura de una antena es la relación entre el área efectiva de la antena y su área física.

$$\mu_{ap} = \frac{A_{ef}}{A_{fis}} \leq 1$$

Relación entre el **área efectiva** y la **directividad** de una antena:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ef}$$

4.4. Ecuación de transmisión (fórmula de Friis)

